

Mechanik 2

ELASTOSTATIK

Statik deformierbarer Körper

- Formelsammlung -



Bernd Markert

Institut für Allgemeine Mechanik
RWTH Aachen University
2015

11. Grundzüge der Tensorrechnung

11.1 Tensorbegriff

Tensorbegriff und lineare Abbildung

$$\mathbf{w} = \mathbf{T} \mathbf{u}$$

Tensorbegriff und dyadisches Produkt

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{c} := (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}$$

Basisdarstellung eines einfachen Tensors

$$\mathbf{A} := \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (a_i \mathbf{e}_i) \otimes (b_k \mathbf{e}_k) = a_i b_k (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k)$$

11.2 Elementare Rechenregeln der Tensoralgebra

Tensoraddition

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \underbrace{(a_{ik} + b_{ik})}_{c_{ik}} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k)$$

Lineare Abbildung in Basisdarstellung

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = (a_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) (u_j \mathbf{e}_j) = a_{ik} u_j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_j = a_{ik} u_j \delta_{kj} \mathbf{e}_i = a_{ij} u_j \mathbf{e}_i$$

Identitätstensor

$$\mathbf{I} = \delta_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$$

Skalarprodukt in Basisdarstellung

$$\alpha = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_{ik} b_{st} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \cdot (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) = a_{ik} b_{ik}$$

Tensorprodukt in Basisdarstellung

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = a_{ik} b_{kt} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_t)$$

11.3 Spezielle Tensoren und Operationen

Transponierter Tensor in Basisdarstellung

$$\mathbf{A}^T = a_{ik} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i) = a_{ki} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k)$$

Symmetrischer und schiefsymmetrischer Tensor

$$\left. \begin{aligned} \text{sym } \mathbf{A} &= \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) = (\text{sym } \mathbf{A})^T \\ \text{skw } \mathbf{A} &= \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) = -(\text{skw } \mathbf{A})^T \end{aligned} \right\} \rightarrow \mathbf{A} = \text{sym } \mathbf{A} + \text{skw } \mathbf{A}$$

Inverser Tensor

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{w} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{w} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{v}$$

Orthogonaler Tensor

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$$

Spur eines Tensors

$$\text{tr } \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = a_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k) = a_{ij} \delta_{ik} \delta_{jk} = a_{kk}$$

11.4 Tensoren höherer Stufe

Allgemeine Darstellung der linearen Abbildung

$$\overset{n}{\mathbf{A}} \overset{s}{\mathbf{B}} = \overset{n-s}{\mathbf{C}} \quad \text{mit } n > s$$

11.5 Fundamentaltensor 3. Stufe (RICCI-Tensor)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \overset{3}{\mathbf{E}} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \quad \text{mit} \quad \overset{3}{\mathbf{E}} = e_{ijk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)$$

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & : \text{gerade Permutation } (e_{123}, e_{231}, e_{312}) \\ 0 & : \text{doppelte Indizierung (z. B. } e_{112}, e_{212}, e_{333}, \dots) \\ -1 & : \text{ungerade Permutation } (e_{321}, e_{213}, e_{132}) \end{cases}$$

11.6 Der axiale Vektor

$$\overset{\mathbf{A}}{\mathbf{t}} := \frac{1}{2} \overset{3}{\mathbf{E}} \mathbf{T}^T = \frac{1}{2} \mathbf{I} \times \mathbf{T}$$

Axialer Vektor und lineare Abbildung

$$(\text{skw } \mathbf{T}) \mathbf{v} = \overset{\mathbf{A}}{\mathbf{t}} \times \mathbf{v}$$

Bem.: Ein symmetrischer Tensor besitzt keinen axialen Vektor.

Axialer Vektor und das Vektorprodukt zwischen Tensoren

$$\mathbf{S} \times \mathbf{T} = \overset{3}{\mathbf{E}} (\mathbf{S} \mathbf{T}^T)$$

Axialer Vektor und äußeres Tensorprodukt zw. Vektor und Tensor

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{T}) \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\mathbf{T} \mathbf{v})$$

Das äußere Tensorprodukt von Tensoren

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = a_{ik} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \otimes b_{no} (\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_o) = a_{ik} b_{no} e_{inj} e_{kop} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_p)$$

Der Kofaktor, die Adjungierte und die Determinante

$$\text{adj } \mathbf{A} = (\text{cof } \mathbf{A})^T = (\overset{\dagger}{\mathbf{A}})^T$$

$$\det \mathbf{A} = \frac{1}{6} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}$$

$$\text{cof } \mathbf{A} = \frac{1}{2} (a_{ik} a_{no} e_{inj} e_{kop}) (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_p)$$

Berechnung des inversen Tensors

$$\mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1} \text{adj } \mathbf{A}$$

11.7 Eigenwertproblem und Invarianten eines Tensors

$$(\mathbf{A} - \gamma \mathbf{I}) \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

$$I_{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \text{tr } \mathbf{A}$$

$$II_{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} [(\text{tr } \mathbf{A})^2 - \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{A})] = \text{tr}(\text{cof } \mathbf{A})$$

$$III_{\mathbf{A}} = \det \mathbf{A}$$

12. Grundzüge der Vektor- und Tensoranalysis

12.1 Funktionen vektorieller und tensorieller Variablen

Gradient, Divergenz und Rotation

$$\text{grad } \phi(\mathbf{x}) := \frac{d\phi(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_i} \mathbf{e}_i =: \phi_{,i} \mathbf{e}_i$$

$$\text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}) := \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j =: v_{i,j} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$$

$$\text{grad } \mathbf{T}(\mathbf{x}) := \frac{d\mathbf{T}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} =: \frac{\partial t_{ik}(\mathbf{x})}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j =: t_{ik,j} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j)$$

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) := \text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{I} = v_{i,j} \delta_{in} \delta_{jn} = v_{n,n}$$

$$\text{div } \mathbf{T}(\mathbf{x}) = [\text{grad } \mathbf{T}(\mathbf{x})] \mathbf{I} = t_{ik,j} \delta_{kn} \delta_{jn} \mathbf{e}_i = t_{in,n} \mathbf{e}_i$$

$$\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}) := \mathbf{E} [\text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x})]^T = e_{ijn} v_{o,p} \delta_{jp} \delta_{no} \mathbf{e}_i = e_{ijn} v_{n,j} \mathbf{e}_i$$

Ableitung von Funktionen von beliebigen Vektoren und Tensoren nach Tensoren

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{T}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\partial R_{ij}(\mathbf{T}, \mathbf{v})}{\partial t_{st}} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t$$

Hauptinvarianten und ihre Ableitungen

$$\frac{\partial I_{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{I} \quad \frac{\partial II_{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{A} \ast \mathbf{I} \quad \frac{\partial III_{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{A}} = \text{cof } \mathbf{A}$$

12.2 Integralsätze

$$\int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes d\mathbf{a} = \int_V \text{grad } \mathbf{u}(\mathbf{x}) dv \quad \text{wobei} \quad d\mathbf{a} = \mathbf{n} da$$

$$\int_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \text{div } \mathbf{u} dv \quad : \text{GAUSSSCHER INTEGRALSATZ}$$

13. Anwendungen zur Tensorrechnung

13.1 Flächenmomente 1. und 2. Grades für Flächen mit $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$

$$\mathbf{M}_O^I = \underbrace{\int_S x_3 \, da}_{S_2} \mathbf{e}_2 - \underbrace{\int_S x_2 \, da}_{S_3} \mathbf{e}_3$$

$$J_{11} = J_p = \int_S (x_2^2 + x_3^2) \, da$$

$$J_{22} = \int_S x_3^2 \, da, \quad J_{33} = \int_S x_2^2 \, da$$

$$J_{23} = J_{32} = - \int_S x_2 x_3 \, da$$

13.2 Flächenträgheitsmomente in unterschiedlichen Bezugssystemen

Flächenträgheitsmomente bzgl. eines Schwerpunktsystems

$$\bar{J}_{22} = \int_A \bar{x}_3^2 \, da, \quad \bar{J}_{33} = \int_A \bar{x}_2^2 \, da$$

$$\bar{J}_{23} = \bar{J}_{32} = - \int_A \bar{x}_2 \bar{x}_3 \, da$$

Der Satz von **STEINER-HUYGENS**

$$\hat{J}_{22} = \bar{J}_{22} + \hat{x}_{A3}^2 A$$

$$\hat{J}_{33} = \bar{J}_{33} + \hat{x}_{A2}^2 A$$

$$\hat{J}_{23} = \hat{J}_{32} = \bar{J}_{23} - \hat{x}_{A2} \hat{x}_{A3} A$$

Flächenträgheitsmomente bzgl. gedrehter Schwerpunktsachsen

$$\tilde{J}_{22} = \frac{1}{2} (\bar{J}_{22} + \bar{J}_{33}) + \frac{1}{2} (\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33}) \cos 2\varphi + \bar{J}_{23} \sin 2\varphi$$

$$\tilde{J}_{33} = \frac{1}{2} (\bar{J}_{22} + \bar{J}_{33}) - \frac{1}{2} (\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33}) \cos 2\varphi - \bar{J}_{23} \sin 2\varphi$$

$$\tilde{J}_{23} = \tilde{J}_{32} = -\frac{1}{2} (\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33}) \sin 2\varphi + \bar{J}_{23} \cos 2\varphi$$

13.3 Hauptträgheitsmomente

$$\tan 2\varphi_O = \frac{2\bar{J}_{23}}{\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33}}$$

$$\sin 2\varphi_O = \frac{2\bar{J}_{23}}{\pm \sqrt{(\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33})^2 + 4\bar{J}_{23}^2}}$$

$$\cos 2\varphi_O = \frac{\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33}}{\pm \sqrt{(\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33})^2 + 4\bar{J}_{23}^2}}$$

$$J_{1/2} = \frac{1}{2} (\bar{J}_{22} + \bar{J}_{33}) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33})^2 + \bar{J}_{23}^2}$$

TEIL III: GRUNDLAGEN DER ELASTOSTATIK

14. Motivation und elementare Anwendungen

14.1 Elementarer Spannungsbegriff

$$\sigma = \frac{\text{Kraft } N_1}{\text{Fläche } A} \quad [\text{N/m}^2]$$

14.2 Elementarer Verzerrungsbegriff

$$\varepsilon(x_1) = \frac{du}{dx_1} =: u'(x_1) = \frac{\sigma}{E} + \alpha_\theta \Delta\theta \quad \longleftrightarrow \quad \sigma = E(\varepsilon - \alpha_\theta \Delta\theta)$$

14.3 Axial beanspruchte Stäbe und Stabwerke

$$(EA u')' = -n_1 + (EA \alpha_\theta \Delta\theta)'$$

15. Spannungs- und Verzerrungszustand

15.1 Der allgemeine Spannungszustand

Lemma von **CAUCHY**

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n})$$

Spannungstensor und Theorem von **CAUCHY**

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \sigma_{ik}(\mathbf{x}) (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \quad \text{mit} \quad \sigma_{ik} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}$$

Symmetrie des Spannungstensors

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad \longleftrightarrow \quad \sigma_{ik} = \sigma_{ki}$$

15.2 Der allgemeine Verzerrungszustand

Materieller Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = \frac{d(\mathbf{x} + \mathbf{u})}{d\mathbf{x}} = \mathbf{I} + \text{grad } \mathbf{u}$$

GREENScher Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \varepsilon_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j})$$

$$\mathbf{E}_{\text{lin}} =: \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

15.3 Volumendehnung

$$e_v = \frac{dv - dv_0}{dv_0} = \det \mathbf{F} - 1$$

$$e_{v \text{ lin}} =: \varepsilon_v = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{I} = \text{div } \mathbf{u} = \varepsilon_{ii} = u_{i,i} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

16. Das Stoffgesetz der linearen Elastizitätstheorie

$$\boldsymbol{\sigma} = \overset{4}{\mathbf{E}} \boldsymbol{\varepsilon} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I}$$

$$\overset{4}{\mathbf{E}} = 2\mu (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\frac{23}{2}} + \lambda (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) : \text{Elastizitätstensor}$$

LAMÉ-Konstanten

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Sonderfälle

$$\tau = G \gamma \quad \text{mit } G : \text{Schubmodul (Gleitmodul)}$$

$$\varepsilon_2 = -\left(\frac{E-2G}{2G}\right) \varepsilon_1 =: -\nu \varepsilon_1 \quad \text{mit } \nu : \text{Querkontraktionszahl}$$

$$\sigma_m^{\text{III}} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \varepsilon_v =: K \varepsilon_v \quad \text{mit } K : \text{Kompressionsmodul}$$

$$(\varepsilon_v)_\theta = 3\alpha_\theta \Delta\theta \quad \text{mit } \alpha_\theta : \text{Wärmeausdehnungskoeffizient}$$

16.1 Allgemeine 3-d Fassung des Stoffgesetzes

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left[\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} \right] - \frac{E}{1-2\nu} \alpha_\theta \Delta\theta \mathbf{I}$$

$$\text{mit } \sigma_{ik} = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \delta_{ik} \right] - \frac{E}{1-2\nu} \alpha_\theta \Delta\theta \delta_{ik}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \boldsymbol{\sigma} - \nu (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} \right] + \alpha_\theta \Delta\theta \mathbf{I}$$

$$\text{mit } \varepsilon_{ik} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \sigma_{ik} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \delta_{ik} \right] + \alpha_\theta \Delta\theta \delta_{ik}$$

17. Das vollständige Gleichungssystem der Elastostatik

Kräftesatz

$$\mathbf{R} = \mathbf{0} = \int_S \mathbf{t} \, da + \int_B \rho \mathbf{b} \, dv = \int_B (\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}) \, dv$$

$$\mathbf{0} = \text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}$$

Momentensatz

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{0} = \int_S \mathbf{x} \times \mathbf{t} \, da + \int_B \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{b}) \, dv = \int_B [\mathbf{x} \times (\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}) + \mathbf{I} \times \boldsymbol{\sigma}] \, dv$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{I} \times \boldsymbol{\sigma} \quad \text{und} \quad \mathbf{0} = \mathbf{x} \times (\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b})$$

17.1 Die **LAMÉ-NAVIER**schen Gleichungen

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \text{grad div } \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

TEIL IV: ELASTOSTATIK DER STÄBE UND BALKEN

18. Elementare Elastostatik der Stäbe und Balken

18.1 Die gerade Biegung des Balkens

Biegenormalspannung bei reiner Biegebelastung

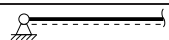

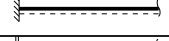

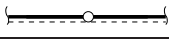
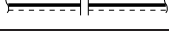

$$\sigma_{11} = \frac{M_2}{J_{22}} x_3 \quad |\sigma_{11 \text{ Rand}}| = \frac{M_2}{W_{22}} \quad \text{mit} \quad W_{22} = \frac{J_{22}}{|x_{3 \text{ Rand}}|}$$

Biegenormalspannung bei kombinierter Biege- und Längsbelastung

$$\sigma_{11}(x_1, x_3) = \frac{N_1(x_1)}{A_1(x_1)} + \frac{M_2(x_1)}{J_{22}(x_1)} x_3$$

18.2 Differentialgleichung der geraden Biegelinie

$$(EJ_{22} w'')'' = q_3 - (EJ_{22} \alpha_\Theta \Delta \bar{\Theta}_h)''$$

Randbedingung	Symbol	statische RB	geometrische RB
gelenkiges Auflager		$M_2 = 0$	$w = 0$
freies Ende		$\{Q_3; M_2\} = 0$	-
Einspannung		-	$\{w; w'\} = 0$
Parallelführung		$Q_3 = 0$	$w' = 0$
Übergangsbedingung	Symbol	statische RB	geometrische RB
Momentengelenk		$M_2 = 0$	$w_l = w_r$
Querkraftgelenk		$Q_3 = 0$	$w'_l = w'_r$
Querschnittssprung		-	$w_l = w_r$ $w'_l = w'_r$

18.3 Schubspannungsermittlung bei der geraden Biegung prismatischer Balken mit Vollquerschnitt

$$\sigma_{31}(x_1, x_3) = -\frac{Q_3(x_1) S_2(x_3)}{J_{22} b(x_3)}$$

18.4 Schubspannungsermittlung bei der Biegung gerader Balken mit dünnwandigem Querschnitt

$$\tau(s) = -\frac{Q_3 S_2(s)}{J_{22} \delta(s)} \quad \text{mit} \quad S_2(s) = \int_0^s x_3 \delta(\bar{s}) d\bar{s}$$

18.5 Der Schubmittelpunkt einfach symmetrischer Profile

$$x_{2M} = x_{2B} - \frac{1}{J_{22}} \int_0^l S_2(s) r_t(s) ds$$

18.6 Die schiefe Biegung des Balkens

Biegenormalspannung für $J_{23} = J_{32} \equiv 0$

$$\sigma_{11} = \frac{N_1}{A_1} + \frac{M_2}{J_{22}} x_3 - \frac{M_3}{J_{33}} x_2$$

18.7 Differentialgleichung der schiefen Biegelinie

Für $J_{23} = J_{32} \equiv 0$

$$EJ_{22} w_3^{IV} = q_3 \quad EJ_{33} w_2^{IV} = q_2$$

18.8 Schubspannungsermittlung bei schiefer Biegung

Für $J_{23} = J_{32} \equiv 0$

$$\tau(s) = -\left(\frac{Q_3 S_2(s)}{J_{22} \delta(s)} + \frac{Q_2 S_3(s)}{J_{33} \delta(s)} \right)$$

wobei

$$S_2(s) = \int_0^s x_3 \delta(\bar{s}) d\bar{s}, \quad S_3(s) = \int_0^s x_2 \delta(\bar{s}) d\bar{s}$$

19. Torsion prismatischer Stäbe

19.1 Der gerade Stab mit Kreisvollquerschnitt

Verschiebungen und Verzerrungen infolge M_T

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx_1} = \frac{M_T}{G J_p} : \text{Verdrillung}$$

Schubspannungen infolge M_T

$$\tau_T := \sigma_{1\varphi} = \frac{M_T}{J_p} r$$

$$\max \tau_T =: \frac{M_T}{W_p} \quad \text{mit} \quad W_p = \frac{J_p}{R}, J_p = \int_{A_1} r^2 da_1$$

19.2 Der gerade Stab mit dünnwandigem geschlossenen Querschnitt

Schubspannung aus Torsion

$$\tau(s) = \frac{M_T}{2 A_m \delta(s)}$$

Die 1. BREDT'sche Formel

$$|\tau(s)|_{\max} =: \frac{|M_T|}{W_T} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} W_T := 2 A_m \delta(s)_{\min} \\ W_T : \text{Torsionswiderstandsmoment} \end{cases}$$

Die 2. BREDT'sche Formel

$$\vartheta =: \frac{M_T}{G J_T} \quad \text{mit} \quad J_T := \frac{4 A_m^2}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}} : \text{Torsionsträgheitsmoment}$$

Berechnung der Verwölbung







$$u_1(s) = u_1(0) + \vartheta \left(2 A_m \frac{\int_0^s \frac{d\bar{s}}{\delta(\bar{s})}}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}} - \int_0^s r_t(\bar{s}) d\bar{s} \right)$$

19.3 Gerader Stab mit dünnwandigem offenen Querschnitt

Verdrillung

$$\vartheta = \frac{M_T}{G J_T} \quad \text{mit} \quad J_T = \beta \sum_i \underbrace{\frac{1}{3} \delta_i^3 h_i}_{J_{Ti}} = \beta \int_s \underbrace{\frac{1}{3} \delta^3(s)}_{dJ_T} ds$$

mit $\beta \approx 1, 0$: Querschnittsformbeiwert

Profilform						
β	1, 0	1, 12	1, 12	1, 3	1, 0	1, 0

Schubspannungen infolge M_T

$$|\tau(s)|_{\max} = \frac{|dM_T|}{dJ_T} \delta(s) \quad \rightarrow \quad |\tau_i|_{\max} = \frac{|M_T|}{J_T} \delta_i$$

Verwölbung

$$u_1(s) = u_1(0) - \vartheta \int_0^s r_t(\bar{s}) d\bar{s}$$

Wölbfunktion

$$\xi(s) := \frac{u_1(s)}{\vartheta}$$

TEIL V: ENERGIEMETHODEN DER ELASTOSTATIK

20. Energiesatz und Arbeitssatz

20.1. Energiesatz der Mechanik

$$\mathbf{0} = \text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}$$

$$\underbrace{\int_B \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} \, dv}_{dW} = \underbrace{\int_S \mathbf{t} \cdot d\mathbf{u} \, da + \int_B \rho \mathbf{b} \cdot d\mathbf{u} \, dv}_{dA_a}$$

Energiesatz der Mechanik

$$dW(\mathcal{B}) = dA_a(\mathcal{B}) \quad \longrightarrow \quad \text{innere Energie} = \text{äußere Energie}$$

20.2. Arbeitssatz der Mechanik

$$W(\mathcal{B})_{12} = A_a(\mathcal{B})_{12}$$

Energieerhaltungssatz bei konservativen Systemen

$$U_i(\mathcal{B}) + U_a(\mathcal{B}) = \text{konst.}$$

20.3. Die Formänderungsarbeit bei geraden Stäben

$$W(\mathcal{B}) = \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{N_1^2}{E A_1} + \frac{M_2^2}{E J_{22}} + \frac{M_3^2}{E J_{33}} + \kappa_3 \frac{Q_3^2}{G A_1} + \kappa_2 \frac{Q_2^2}{G A_1} + \frac{M_T^2}{G J_T} \right) dx_1$$

20.4. Die Sätze von **CASTIGLIANO** und **MENABREA**

Der 1. Satz von **CASTIGLIANO**

$$\mathbf{F}_i = \frac{\partial A_a(\mathcal{B})}{\partial \mathbf{u}_i} = \frac{\partial W(\mathcal{B})}{\partial \mathbf{u}_i}$$

Der 2. Satz von **CASTIGLIANO**

$$\mathbf{u}_i = \frac{\partial A_a(\mathcal{B})}{\partial \mathbf{F}_i} = \frac{\partial W(\mathcal{B})}{\partial \mathbf{F}_i}$$

Der Satz von **MENABREA**

$$\mathbf{0} = \frac{\partial A_a(\mathcal{B})}{\partial \mathbf{X}_i} = \frac{\partial W(\mathcal{B})}{\partial \mathbf{X}_i}$$

20.5. Die Sätze von **BETTI** und **MAXWELL**

Der Satz von **BETTI**

Satz: Wirken zwei Kräftesysteme \mathcal{F}_i und \mathcal{F}_k auf einen linear-elastischen Körper, so ist die Arbeit A_{ik} , die von \mathcal{F}_i auf dem durch \mathcal{F}_k verursachten Verschiebungsweg geleistet wird, gleich der Arbeit A_{ki} , die von \mathcal{F}_k auf dem von \mathcal{F}_i verursachten Weg geleistet wird.

$$A_{ii} = \alpha_{ii} \int_0^{P_i} \tilde{P}_i \, d\tilde{P}_i = \frac{1}{2} \alpha_{ii} P_i^2 = \frac{1}{2} P_i f_{ii}$$

$$A_{kk} = \int_0^{f_{kk}} P_k \, d\tilde{f}_{kk} = \frac{1}{2} \alpha_{kk} P_k^2 = \frac{1}{2} P_k f_{kk}$$

$$A_{ik} = P_i \alpha_{ik} \int_0^{P_k} d\tilde{P}_k = P_i \alpha_{ik} P_k = P_i f_{ik}$$

mit $df_{ik} =: \alpha_{ik} dP_k \longrightarrow \alpha_{ik} = \frac{df_{ik}}{dP_k}$

und α_{ik} : Einflusszahl

$$A_{ik} = A_{ki} \quad \text{und} \quad \alpha_{ik} = \alpha_{ki}$$

Ermittlung der Gesamtarbeit

$$\begin{aligned} W(\mathcal{B}) = A_a(\mathcal{B}) &= A_{ii} + A_{ik} + A_{kk} \\ &= \frac{1}{2} P_i \alpha_{ii} P_i + P_i \alpha_{ik} P_k + \frac{1}{2} P_k \alpha_{kk} P_k \end{aligned}$$

Der Satz von **MAXWELL**

Satz: Die Verschiebung an der Stelle i infolge einer Kraft der Größe „1“ an der Stelle k ist gleich der Verschiebung an der Stelle k infolge einer Kraft der Größe „1“ an der Stelle i .

für $P_i = P_k = „1“$

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \alpha_{ik} \equiv f_{ik} \\ \alpha_{ki} \equiv f_{ki} \end{cases} \quad \text{q. e. d.}$$

Formänderungsarbeit

$$\mathcal{W}(\mathcal{B}) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_l \left(\frac{N_i N_i}{EA_1} + \dots \right) dx_1}_{W_{ii}} + \underbrace{\int_l \left(\frac{N_i N_k}{EA_1} + \dots \right) dx_1}_{W_{ik}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_l \left(\frac{N_k N_k}{EA_1} + \dots \right) dx_1}_{W_{kk}}$$

20.6 Das Prinzip der virtuellen Arbeit (PdvA)

Das PdvK der Stabtheorie

$$„1“ f = \int_l \left(\frac{N_1 \bar{N}_1}{EA_1} + \frac{M_2 \bar{M}_2}{EJ_{22}} + \dots \right) dx_1$$

$$\text{mit} \begin{cases} \delta \mathcal{A}_a = f \delta P \quad \text{mit} \quad \delta P = \bar{P} = „1“ & : \text{virtuelle „Einslast“} \\ \delta \{N_1, M_2, \dots\} =: \{\bar{N}_1, \bar{M}_2, \dots\} & : \text{Schnittgrößen infolge „1“} \end{cases}$$

TEIL VI: STABILITÄT IN DER ELASTOSTATIK

21. Elementare Stabilitätsprobleme in der Elastostatik

Stabilität in konservativen Systemen

$$\delta^2 \mathcal{U}(\mathcal{B}) \begin{cases} > 0 & : \text{stabiles Gleichgewicht} \\ = 0 & : \text{indifferentes Gleichgewicht} \\ < 0 & : \text{labiles Gleichgewicht} \end{cases}$$

21.1 Knicken eines Druckstabs (**EULER**-Knickfälle)

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(l_k)^2}$$

