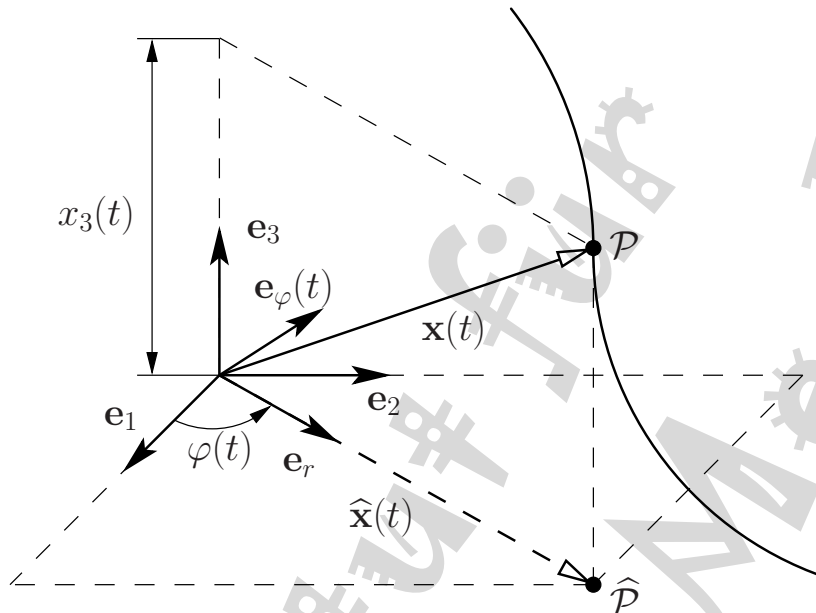


Der dritte Einheitsvektor des begleitenden Koordinatensystems steht senkrecht auf der von \mathbf{e}_t und \mathbf{e}_n aufgespannten Ebene (vgl. Mechanik 1, 1.2(D)):

$$\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$$

2.3 Beschreibung mittels Zylinderkoordinaten



In Zylinderkoordinaten kann der Ortsvektor des Massenpunktes durch

$$\mathbf{x}(t) = \hat{x}(t) \mathbf{e}_r(t) + x_3(t) \mathbf{e}_3$$

und der Geschwindigkeitsvektor durch

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(t) = \hat{x}(t) \dot{\mathbf{e}}_r(t) + \dot{\hat{x}}(t) \mathbf{e}_r(t) + \dot{x}_3(t) \mathbf{e}_3$$

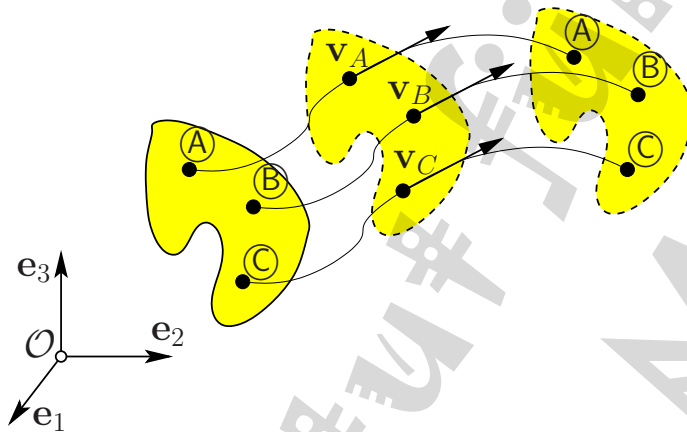
ausgedrückt werden.

3.4 Sonderfälle der räumlichen Bewegung

(A) Die Translation

Definition: Bei der reinen Translationsbewegung eines Körpers haben alle Körperpunkte zu jedem Zeitpunkt der Bewegung denselben Geschwindigkeitsvektor.

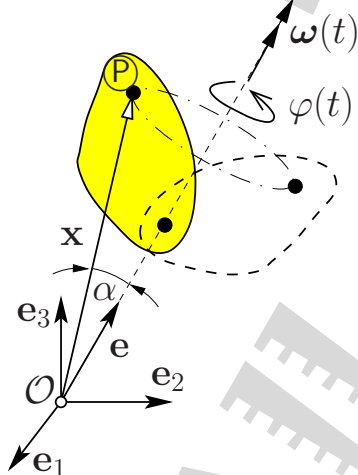
Veranschaulichung:



(B) Die Drehung um eine raumfeste Achse

Bem.: Bei der Drehung um eine raumfeste Achse e bewegen sich alle nicht auf dieser Achse befindlichen Punkte auf einer Kreisbahn im Raum um diese Achse (vgl. Elastostatik 10.7).

Veranschaulichung:



e : Raumfeste Drehachse $|e| = 1$

$\varphi(t)$: Winkel

$\varphi = \varphi e$: Vektor des Winkels

$\omega = \dot{\varphi}$: **Winkelgeschwindigkeitsvektor**

Beschreibung der Geschwindigkeit v und Beschleunigung a eines Punktes

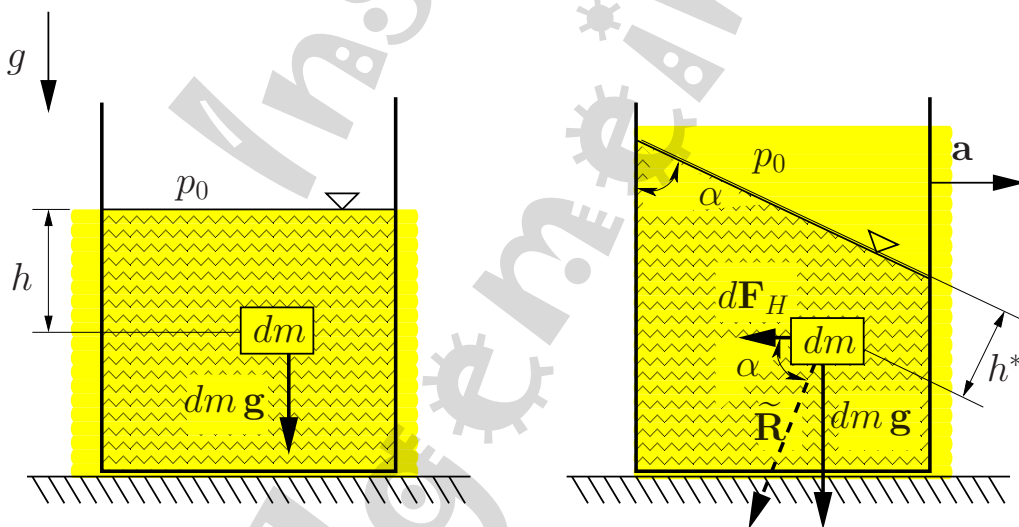
Daraus folgt:

$$\ddot{x}_2 = \frac{h F + l_2 G_2 - l_1 G_1}{l_2 \left(m_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + m_2 \right)}$$

Seile können nur Zugkräfte aufnehmen. Daher muss $\ddot{x}_2 \leq g$ erfüllt sein bzw. $-\ddot{x}_1 \leq g$, wenn F umgekehrt angreift.

Beispiel 4: Beschleunigt bewegtes Gefäß mit Flüssigkeit

Gesucht Neigungswinkel α der Flüssigkeitsoberfläche zur Wand und Druck p^* im Abstand h^* der geneigten Oberfläche bei konstanter Beschleunigung a des Gefäßes.



Gegeben: Beschleunigung a , p_0 , g

Man bildet das dynamische Gleichgewicht an einem infinitesimalen Massen-

element dm .

Dann gilt

$$d\mathbf{F}_{\tilde{H}} = -\mathbf{a} dm \quad : \text{D'ALEMBERTSche Hilfskraft}$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = (-\mathbf{a} + \mathbf{g}) dm \quad : \text{resultierende Kraft}$$

$$\tilde{R} = |\tilde{\mathbf{R}}| = \sqrt{a^2 + g^2} dm \quad : \text{Größe der resultierenden Kraft}$$

$$\sin \alpha = \frac{g dm}{\sqrt{a^2 + g^2} dm} = \sqrt{\frac{g^2}{a^2 + g^2}}$$

$$\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{g^2}{a^2 + g^2}}$$

Für den hydrostatischen Druck p in einer ruhenden Flüssigkeit mit der Dichte ρ im Abstand h von der Flüssigkeitsoberfläche gilt

$$p = p_0 + \rho gh$$

Analog folgt für das konstant beschleunigte Gefäß

$$p^* = p_0 + \rho h^* \sqrt{a^2 + g^2}$$

Es gilt der Impulssatz für die Einzelmassen M und m :

$$\int_{t_0}^t F_c \, d\tilde{t} = M v_M(t) - M v_M(t_0)$$

$$- \int_{t_0}^t F_c \, d\tilde{t} = m v_m(t) - m v_m(t_0)$$

Durch Addition erhält man den Impulssatz für das Gesamtsystem:

$$0 = M v_M(t) + m v_m(t) - (M + m) v_0$$

Bem.: Man beachte, dass auf das Gesamtsystem keine äußeren Kräfte in horizontaler Richtung wirken.

$$M v_M(t) + m v_m(t) = (M + m) v_0 = \text{konst.}$$

Die Summe der Einzelimpulse

$$B_M = M v_M(t)$$

$$B_m = m v_m(t)$$

$$B_M + B_m = B_{M+m} = \text{konst.}$$

bleibt konstant, da keine äußere Kraft auf den Gesamtschwerpunkt wirkt.

Bem.: Dieser Zusammenhang gilt für Systeme mit beliebig vielen Einzelmassen, die nur unter der Wirkung innerer Kräfte stehen.

Merke: Der Impuls des Gesamtsystems B_{M+m} ist konstant.

Die Kraft $F_c(t)$ ist erst nach dem Befreien einer **Einzelmasse** im Impulssatz relevant. Dies bezeichnet man als *Impulserhaltungssatz*.

Aus der Identität $\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ folgt:

$$\mathbf{x}_i \times \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) = \frac{d}{dt} [\mathbf{x}_i \times (m_i \mathbf{v}_i)]$$

Definition: Der Ausdruck

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{x}_i \times (m_i \mathbf{v}_i)$$

lautet Drall- oder Drehimpulsvektor.

Aus diesen Überlegungen folgt der Drallsatz für eine einzelne Masse

$$\mathbf{M}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{L}_i = \dot{\mathbf{L}}_i$$

Die Summation über alle Einzelmassen ergibt dann:

$$\mathbf{M}_0 = \frac{d}{dt} \mathbf{L}_0 = \dot{\mathbf{L}}_0 = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N [\mathbf{x}_i \times (m_i \mathbf{v}_i)]$$

Definition: Die Zeitableitung des Gesamtdralls \mathbf{L}_0 eines Massenpunktsystems ist gleich dem resultierenden äußeren Moment \mathbf{M}_0 bzgl. des Ursprungs \mathcal{O} :

$$\dot{\mathbf{L}}_0 = \mathbf{M}_0$$

Bem.: Der Fall der einzelnen Punktmasse ist als Sonderfall für $n = 1$ enthalten. Dieser Drallsatz gilt für einen feststehenden Bezugspunkt (hier: \mathcal{O}).

Im Sonderfall der Statik erhält man für $\mathbf{L}_0 = \mathbf{0}$ die Gleichgewichtsbedingung

$$\mathbf{M}_0 = \dot{\mathbf{L}}_0 = \mathbf{0}$$

(D) Drallsatz bezogen auf den Systemschwerpunkt

Der Ortsvektor \mathbf{x}_i wird als Summe aus dem Ortsvektor \mathbf{x}_S des Schwerpunkts \textcircled{S} des Massenpunktsystems und aus dem Differenzvektor $\Delta \mathbf{x}_i$ dargestellt:

Gegeben:

Federlänge l_0 im entspannten Zustand,

Federsteifigkeit c_F , Masse m , Amplitude f , Reibungsfreiheit

Gesucht: Formänderungsenergien und die Bewegungsgleichung

Punkt $s = f$ - statische Ruhelage, maximale Geschwindigkeit v_{max}

Punkt $s = 2f$ - Extremelage, Geschwindigkeit $v = 0$

$$U(s) = \frac{1}{2} s F(s) \quad , \quad F(f) = m g \quad (\text{statische Ruhelage})$$

$$U(f) = \frac{1}{2} f m g \quad , \quad F(2f) = 2 m g$$

$$U(2f) = \frac{1}{2} 2 f 2 m g = 2 f m g$$

Es gilt der Energieerhaltungssatz $\Pi + T + U = \text{konst.}$ In allgemeiner Lage \hat{s} lässt sich der Satz schreiben als

$$-m g \hat{s} + \frac{1}{2} m \dot{\hat{s}}^2 + \frac{1}{2} c_F (\hat{s} + f)^2 = \text{konst.}$$

Zeitdifferentiation:

$$-m g \dot{\hat{s}} + m \dot{\hat{s}} \ddot{\hat{s}} + c_F (\hat{s} + f) \dot{\hat{s}} = 0$$

Die Gleichung ist erfüllt, wenn $\dot{\hat{s}} = 0$ oder

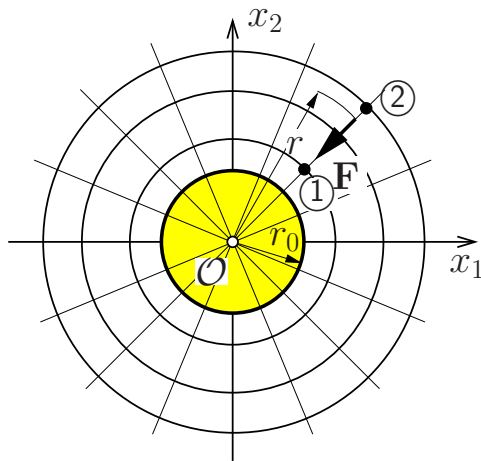
$$-m g + m \ddot{\hat{s}} + c_F (\hat{s} + f) = 0$$

Mit $c_F f = m g$ (Gleichgewicht) folgt.

$$\ddot{\hat{s}} + \frac{c_F}{m} \hat{s} = 0$$

Merke: Durch Zeitableitung des Energieerhaltungssatzes können Bewegungsgleichungen hergeleitet werden.

Beispiel 1: Gravitationsfeld der Erde



$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

$$\text{mit } \frac{F_i}{|\mathbf{F}|} = \frac{x_i}{r}$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Eine Masse m hat auf der Erdoberfläche ($r = r_0$) die Gewichtskraft \mathbf{F} . Dann wirkt in einem Abstand r vom Mittelpunkt der Erde die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ mit

$$|\mathbf{F}| = G \left(\frac{r_0}{r} \right)^2, \quad r \geq r_0$$

Für die einzelnen Kraftkomponenten im Raum gilt dann für $r \geq r_0$:

$$F_1 = -G \frac{r_0^2}{r^2} \frac{x_1}{r} = -G r_0^2 \frac{x_1}{r^3} = -G r_0^2 \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}$$

$$F_2 = -G r_0^2 \frac{x_2}{r^3}, \quad F_3 = -G r_0^2 \frac{x_3}{r^3}$$

Die durch die Kraft \mathbf{F} geleistete infinitesimale Arbeit dW ist gleich der Abnahme des Potentials der Kraft \mathbf{F} :

$$dA = -d\Pi$$

Mit

$$dA = -F dr = -G \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 dr, \quad r \geq r_0$$

ergibt dies

$$d\Pi = G \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 dr$$

Mit $\mathbf{x} = \mathbf{x}_S + \Delta\mathbf{x}$ gilt

$$\mathbf{M}_A = \frac{d}{dt} \int_B (\mathbf{x}_S + \Delta\mathbf{x}) \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_S + \Delta\mathbf{x})] dm = \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\theta}_A \boldsymbol{\omega})$$

Bem.: Diese Gleichung ist auch als Satz von STEINER-HUYGENS bekannt (vgl. Mechanik 2, 12.2). Man erhält ihn, indem man wieder den beliebigen Ortsvektor \mathbf{x} eines charakteristischen **Massenelements** dm durch die Summe $\mathbf{x}_S + \Delta\mathbf{x}$ aus Schwerpunktsvektor und Differenzvektor $\Delta\mathbf{x}$ ausdrückt und die Unabhängigkeit von \mathbf{x}_S von der Position des charakteristischen Massenelements dm benutzt.

Dabei ist

$$\boldsymbol{\theta}_A = \boldsymbol{\theta}_S + \boldsymbol{\theta}_{AS}$$

mit

$$\boldsymbol{\theta}_{AS} = m \begin{bmatrix} x_{S3}^2 + x_{S2}^2 & -x_{S1}x_{S2} & -x_{S1}x_{S3} \\ -x_{S2}x_{S1} & x_{S1}^2 + x_{S3}^2 & -x_{S2}x_{S3} \\ -x_{S3}x_{S1} & -x_{S3}x_{S2} & x_{S2}^2 + x_{S1}^2 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

- Aus der Definition des Drallvektors \mathbf{L} folgt, dass dieser kollinear zum Winkelgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}$ ist, wenn $\boldsymbol{\omega}$ die Richtung einer Hauptträgheitsachse hat. Dann gilt mit θ_I als Massenträgheitsmoment bezüglich dieser Achse:

$$\begin{bmatrix} L_I \\ L_{II} \\ L_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_I & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{III} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_I \omega_I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

und in einem beliebigen Koordinatensystem:

$$\mathbf{L} = \theta_I \boldsymbol{\omega}_I \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i = \theta_I \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i$$

Bestimmung der einzelnen Komponenten A_1, A_2, B_1, B_2 :

Der Drallsatz um den Punkt A liefert mit $\omega_1 = \omega_2 = 0, \omega_3 = \omega$

$$\mathbf{L}_A = \omega \theta_{13}^A \mathbf{e}_1 + \omega \theta_{23}^A \mathbf{e}_2 + \omega \theta_{33}^A \mathbf{e}_3$$

Da die zeitliche Änderung des Dralls bezüglich des Führungssystems gleich Null ist, folgt

$$\mathbf{M}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_A = -\omega^2 \theta_{23}^A \mathbf{e}_1 + \omega^2 \theta_{13}^A \mathbf{e}_2$$

Das Moment um \textcircled{A} lautet

$$\mathbf{M}_A = l \mathbf{e}_3 \times (B_1 \mathbf{e}_1 + B_2 \mathbf{e}_2) = (B_1 \mathbf{e}_2 - B_2 \mathbf{e}_1) l$$

Daraus folgt in Komponentendarstellung:

$$\mathbf{e}_1: \omega^2 \theta_{13}^A = l B_1$$

$$\mathbf{e}_2: -\omega^2 \theta_{23}^A = -l B_2$$

☞ Die Auflagerkräfte sind nur dann **gleich** Null, wenn die deviatorischen Anteile des Massenträgheitstensors $\theta_{13}^A, \theta_{23}^A$ verschwinden. Ein Rotor, der diese Eigenschaft zusätzlich zur ersten Bedingung erfüllt, heißt *dynamisch ausgewuchtet*.

5.3 Die kinetische Energie des starren Körpers

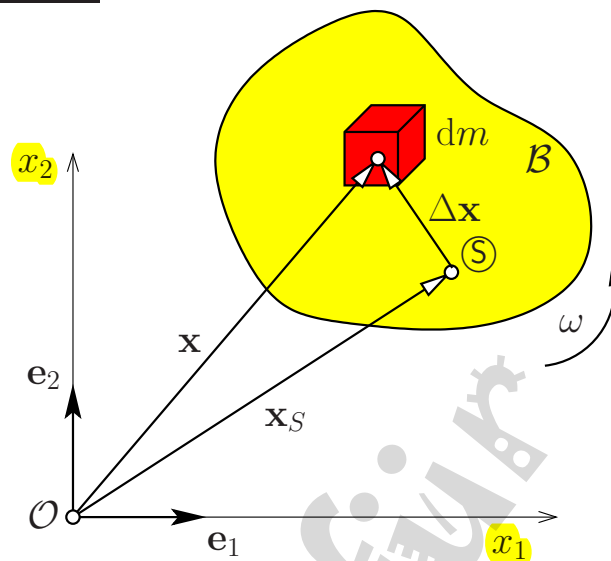
- Die gesamte kinetische Energie T für das Massenpunktsystem lässt sich wie folgt darstellen:

$$T = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \Delta v_i^2$$

Dabei ist v_S die Schwerpunktschwindigkeit und Δv_i die Differenzgeschwindigkeit der einzelnen Massenpunkte m_i bezüglich des Schwerpunkts \textcircled{S} .

Aus der Kinematik des starren Körpers folgt

$$\Delta \mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \Delta \mathbf{x}_i$$

Veranschaulichung:

- Der Drallsatz bezüglich des Schwerpunkts \textcircled{S} vereinfacht sich dann zu der skalaren Gleichung

$$M_S = \frac{d}{dt} \omega \int_B (x_1^2 + x_2^2) dm = \frac{d}{dt} (\theta^S \omega)$$

und für den Drallsatz bezüglich eines beliebigen, feststehenden Punktes gilt

$$M_A = \frac{d}{dt} (\theta^A \omega) = \frac{d}{dt} [(\theta^S + \theta^{AS}) \omega]$$

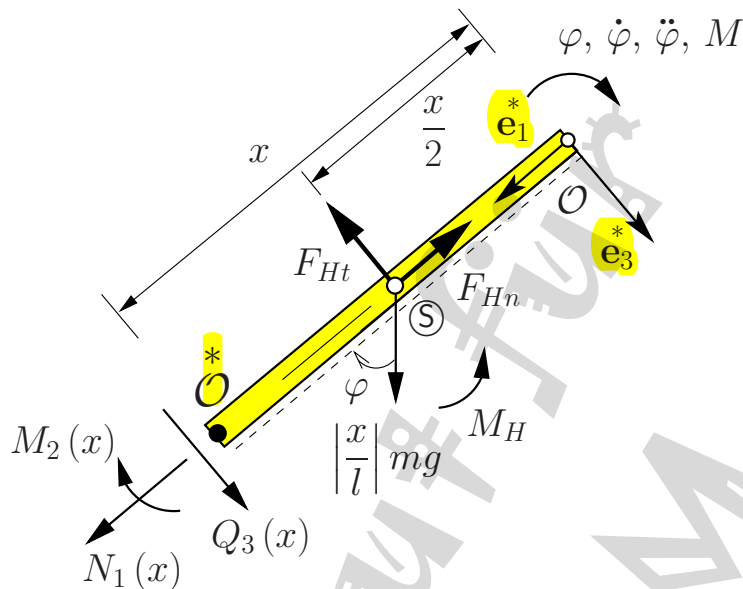
- Der Einfachheit halber sind hier die Indizes der Komponenten des Trägheitstensors unterdrückt worden, da als einzige die Komponente θ_{33}^S bzw. θ_{33}^A nicht verschwindet. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \theta^{AS} &= m (x_{S1}^2 + x_{S2}^2) \\ \theta^A &= \theta^S + m (x_{S1}^2 + x_{S2}^2) = \theta^S + m r_S^2 \end{aligned}$$

wobei r_S der Abstand des Schwerpunkts vom feststehenden Bezugspunkt ist. Da außerdem θ^S und θ^A konstant sind, gilt zudem

$$\begin{aligned} M_S &= \theta^S \dot{\omega} , \\ M_A &= \theta^A \dot{\omega} = (\theta^S + m r_S^2) \dot{\omega} \\ &= m(x_{S1} \ddot{x}_{S2} - x_{S2} \ddot{x}_{S1}) + \theta^S \dot{\omega} \end{aligned}$$

Man befreit an beliebiger Stelle und trägt die tatsächlich wirkenden Kräfte und Momente ein. Zusätzlich trägt man entgegen der angenommenen Bewegungsrichtung die D'ALEMBERTSchen Hilfskräfte und Hilfsmomente ein.



Hier sind die Hilfskräfte F_{Ht} und F_{Hn} definiert durch

$$F_{Ht} = \frac{m}{l} x \left(l - \frac{x}{2} \right) \ddot{\varphi} = m \left(1 - \frac{x}{l} \frac{1}{2} \right) x \ddot{\varphi}$$

$$F_{Hn} = \frac{m}{l} x \left(l - \frac{x}{2} \right) \dot{\varphi}^2 = m \left(1 - \frac{x}{l} \frac{1}{2} \right) x \dot{\varphi}^2$$

Das Hilfsmoment M_H ist gegeben durch

$$M_H = \theta^S(x) \ddot{\varphi} = \left(\frac{m}{l} x \right) \frac{x^2}{12} \ddot{\varphi} = \frac{m}{12} \frac{x}{l} x^2 \ddot{\varphi}$$

Aus $\sum \tilde{M}_{0^*} = 0$ mit 0^* als Schnittpunkt erhält man dann sofort

$$M_2(x) - \theta^S(x) \ddot{\varphi} - F_{Ht} \cdot \frac{x}{2} + \frac{m}{l} g \frac{x}{2} \sin \varphi = 0$$

Da in \textcircled{A} ein Gelenk vorliegt, gilt $M_2(l) = 0$. Daraus lässt sich $\ddot{\varphi}$ nach Einsetzen der Hilfskräfte und -momente ermitteln.

(3) Drehung um die x_3^* -Achse um den Winkel ψ

Man bezeichnet

- (1) $\dot{\varphi}$ als Präzessionsgeschwindigkeit,
- (2) $\dot{\vartheta}$ als Nutationsgeschwindigkeit,
- (3) $\dot{\psi}$ als Winkelgeschwindigkeit der Eigenrotation des Kreisels um die Symmetrieachse.

Die absolute Winkelgeschwindigkeit kann somit wie folgt ausgedrückt werden:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3 + \dot{\vartheta} \mathbf{e}_2 + \dot{\psi} \mathbf{e}_3$$

Mit der Koordinatentransformation

$$\mathbf{e}_3 = \cos \vartheta \mathbf{e}_3^* - \sin \vartheta \mathbf{e}_1^*$$

folgt daraus

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\varphi} \sin \vartheta \mathbf{e}_1^* + \dot{\vartheta} \mathbf{e}_2^* + (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta) \mathbf{e}_3^*$$

Mit den Hauptträgheitsmomenten $\theta_I = \theta_1^*$, $\theta_{II} = \theta_2^*$, $\theta_{III} = \theta_3^*$ erhält man dann den Drallvektor:

$$\mathbf{L}_0 = -\theta_I \dot{\varphi} \sin \vartheta \mathbf{e}_1^* + \theta_{II} \dot{\vartheta} \mathbf{e}_2^* + \theta_{III} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta) \mathbf{e}_3^*$$

Die Führungswinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_F$ lautet

$$\boldsymbol{\omega}_F = -\dot{\varphi} \sin \vartheta \mathbf{e}_1^* + \dot{\vartheta} \mathbf{e}_2^* + \dot{\varphi} \cos \vartheta \mathbf{e}_3^*$$

Der Drallsatz um den ruhenden Punkt \mathcal{O} ist gegeben durch

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{L}_0^\nabla + \boldsymbol{\omega}_F \times \mathbf{L}_0$$

Damit erhält man die Kreiselgleichungen im \mathbf{e}_i^* -Koordinatensystem:

$$\mathbf{r}_P = (x_{1A}(t) + a \cos \varphi) \mathbf{e}_1 + (a \sin \varphi) \mathbf{e}_2$$

$$\dot{\mathbf{r}}_P = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = (-a \sin \varphi) \dot{\varphi} \mathbf{e}_1 + (a \cos \varphi) \dot{\varphi} \mathbf{e}_2 + \dot{x}_{1A} \mathbf{e}_1$$

Im Ausdruck der virtuellen Verschiebung tritt dagegen der letzte Term nicht auf. Man erhält

$$\delta \mathbf{r}_P = \frac{\partial \mathbf{r}_P}{\partial q_i} \delta q_i = (-a \sin \varphi) \delta \varphi \mathbf{e}_1 + (a \cos \varphi) \delta \varphi \mathbf{e}_2$$

Die virtuelle Arbeit δA eines beliebigen Systems B mit dem Volumen V ergibt sich somit zu

$$\delta A(B) = \int_B \Phi \cdot \delta \mathbf{r}_P dV = \int_B \left[\Phi \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_P}{\partial q_i} \delta q_i \right] dV = \left[\int_B \Phi \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_P}{\partial q_i} dV \right] \delta q_i$$

Der Vektor Φ stellt die den virtuellen Verschiebungen zugeordneten (konjugierten) Kraftgrößen dar. Diese verallgemeinerten Kräfte Φ_i sind definiert als

$$\Phi_i = \int_B \Phi \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_P(q_i, t)}{\partial q_i} dV$$

Φ_i ist die zur generalisierten Koordinate q_i gehörende generalisierte Kraftkomponente.

Die Größen q_i , Φ_i sind Verschiebungs/Kraft- oder Verdrehungs/Momenten-Paare.

Die generalisierten Kräfte Φ_i können folgendermaßen kategorisiert werden:

- (1) Generalisierte Kräfte L_i , die durch Bindungen verursacht werden.
- (2) Generalisierte Kräfte Q_i , die durch gegebene äußere Aktionen (Kräfte, Momente, Druck etc.) verursacht werden.
- (3) Generalisierte Kräfte J_i , die durch die Massebeschleunigung verursacht werden.

6.3 Die LAGRANGESchen Gleichungen

Bem.: Das Ziel ist die Herleitung eines Energiefunktional, aus dem durch Differentiation nach den Parametern die Bewegungsgleichungen bestimmt werden können.

Es sollen nun die generalisierten Massenkräfte J_i durch die kinetische Energie des betrachteten Systems ausgedrückt werden.

Nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen gilt

$$\delta A^{(j)} = J_i \delta q_i$$

Andererseits gilt ganz allgemein

$$\delta A^{(j)} = - \int_B \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{r} dm = - \int_B \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta q_i dm$$

Dabei ist $-\mathbf{a}(\mathbf{r}) dm$ die D'ALEMBERTSche Hilfskraft des Massenelements dm und $\delta \mathbf{r}$ die dazugehörige virtuelle Verschiebung.

Mit dem Geschwindigkeitsvektor

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$$

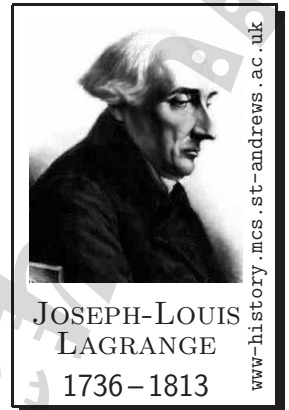
erhält man

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$$

Damit ergibt sich

$$\mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \underbrace{\frac{d}{dt} \left[\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right]}_{(1)} - \underbrace{\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right)}_{(2)}$$

Betrachtung der einzelnen Terme:



$$\delta A^{(j)} = \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

Daraus folgt

$$J_i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

Damit gilt für die Bewegungsgleichung des Systems mit

$$J_i + Q_i + L_i = 0$$

die Gleichung

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i + L_i = 0$$

Im Fall der Statik ergibt sich für $J_i \equiv 0$

$$Q_i + L_i = 0$$

Als Sonderfall betrachten wir

- perfekte Bindungen (virtuelle Arbeit **der Auflagerreaktionen** ist gleich Null),
- konservative Systeme (äußere Kräfte können aus Potentialen bestimmt werden).

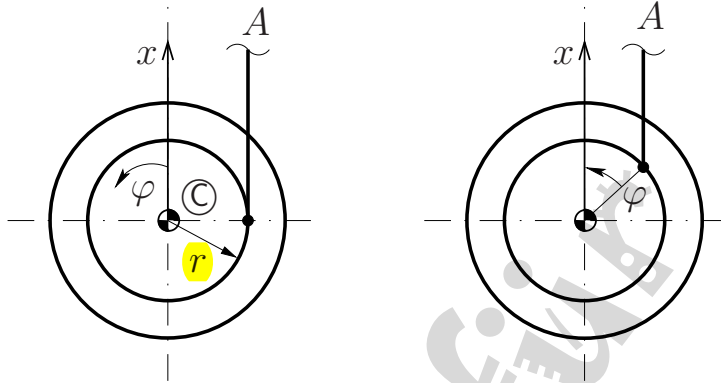
Dann gilt

$$\delta A^{(l)} = 0 \quad , \quad \delta A^{(e)} = -\delta \Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \delta q_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N$$

mit N als Anzahl generalisierter Parameter.

Damit erhält man die Bewegungsgleichungen in der Form

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$$

Beispiel 2: Bewegung eines Jo-JosVeranschaulichung:Gegeben: r, m, θ_c .

Das Seil bleibt senkrecht gespannt; das Jo-Jo spult nur ab.

Überbestimmte Parametrisierung: $q_1 = x, \quad q_2 = \varphi$

Bindungsfunktion (für das linke Bild):

$$f(x, \varphi) = x \mp r\varphi = 0 \begin{cases} \text{aufsteigend } (-) \\ \text{abfallend } (+) \end{cases}$$

LAGRANGE-Funktional:

$$L = T - \Pi = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{I_c}{2} \dot{\varphi}^2 - m g x$$

Erweitertes LAGRANGE-Funktional:

$$L^* = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{I_c}{2} \dot{\varphi}^2 - m g x + \lambda (x \mp r\varphi)$$

LAGRANGESche Gleichungen:

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial L^*}{\partial q^i} = 0$$

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial L}{\partial q_i} + \lambda \frac{\partial f_h}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2$$

$$f_h(q^i) = 0$$

Eingesetzt ergibt sich für Situationen fern des Umkehrpunkts

$$\left\{ \begin{array}{l} -m \ddot{x} - m g + \lambda = 0 \\ -\theta_c \ddot{\varphi} \mp r \lambda = 0 \\ x \mp r \varphi = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} m(\pm r \ddot{\varphi} + g) = \lambda \\ \theta_c \ddot{\varphi} = \mp r \lambda \end{array}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{m g}{1 + \frac{m r^2}{\theta_c}}$$

Seilkraft S

Mit

$$L_1 = \lambda \frac{\partial f(x, \varphi)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial}{\partial x} (x \mp r \varphi) = \lambda$$

gilt

$$S = L_1 = \lambda = \frac{m g}{1 + \frac{m r^2}{\theta_c}}$$

Für die zweite mögliche generalisierte Bindungskraft erhält man

$$L_2 = \lambda \frac{\partial f(x, \varphi)}{\partial \varphi} = \lambda \frac{\partial}{\partial \varphi} (x \mp r \varphi) = \mp r \lambda$$

Dies stellt ein Moment in Richtung von φ dar.

Bem.: In der Literatur wird häufig das LEHRsche Dämpfungsmaß definiert, damit die drei oben beschriebenen Fälle der Dämpfung unterschieden werden können. Dieses Dämpfungsmaß D^* stellt eine Umformung der hier verwendeten **Parametrisierung** folgender Form dar:

$$D^* = \frac{D}{2m} \sqrt{\frac{m}{c}}$$

Dadurch können die Lösungen der charakteristischen Gleichung so dargestellt werden, dass die Art der Dämpfung nach dem Parameter $D^* > 1$, $D^* < 1$, $D^* = 1$ unterschieden werden kann.

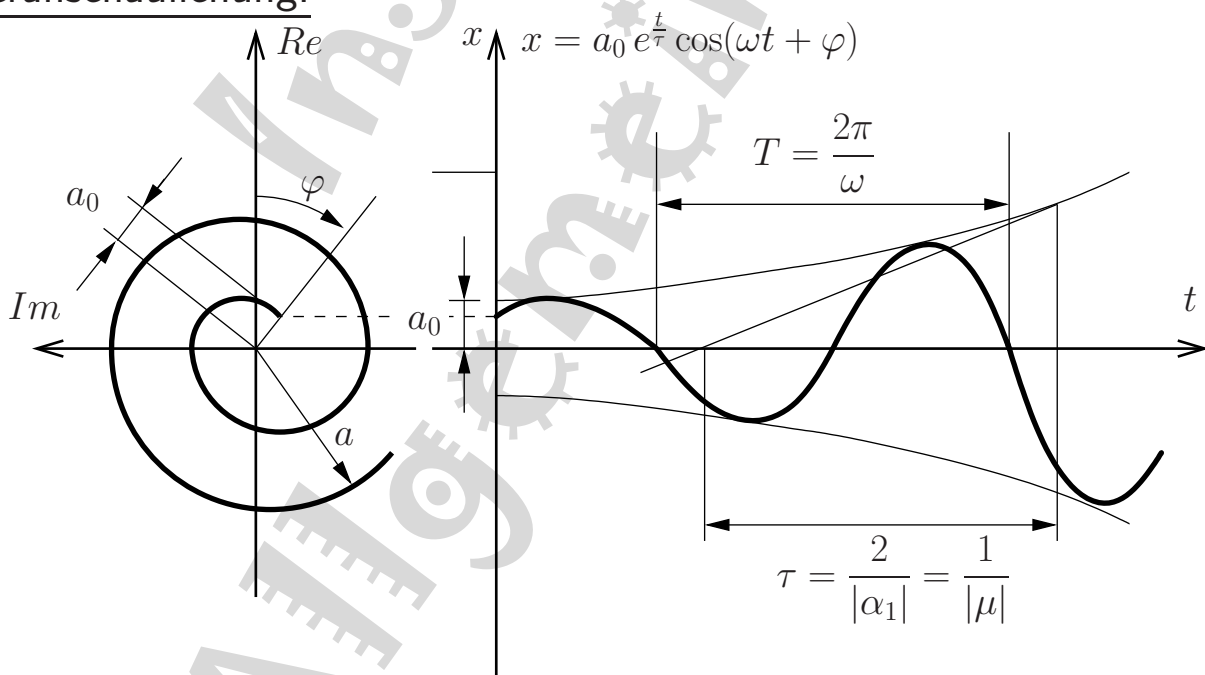
$$r_{1,2} = -\frac{\alpha_1}{2} \pm \sqrt{\frac{c}{m} \sqrt{(D^*)^2 - 1}}$$

7.2 Angefachte Schwingungen

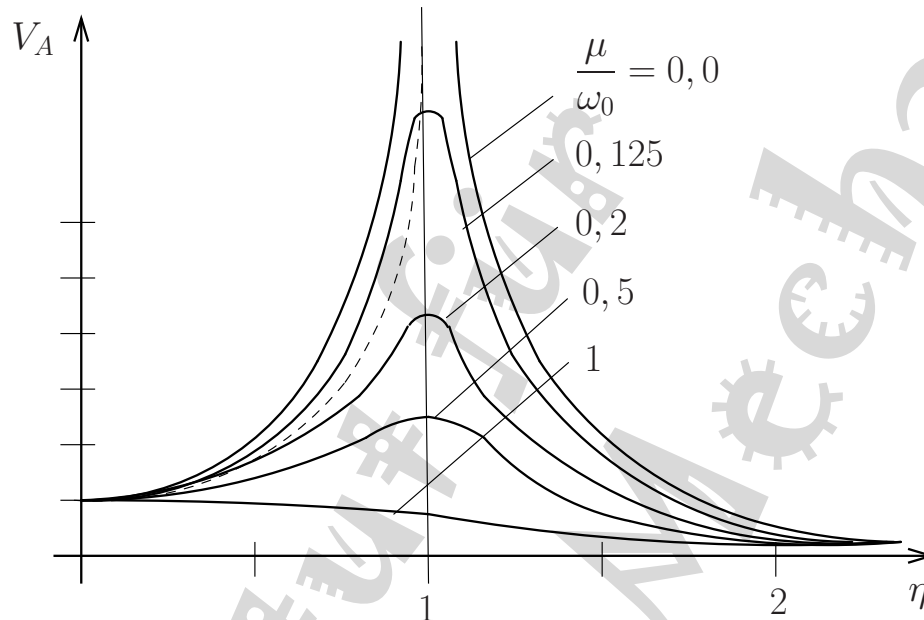
In komplexen Systemen kann eine Anfachtung einer Schwingung durch Energiezufuhr stattfinden. Man spricht dann von einer *angefachten* Schwingung. In diesem Fall ist der *Dämpfungsbeiwert* D negativ, und es gilt:

$$\mu = \frac{D}{2m}, \quad \alpha_1 = -\frac{D}{m}$$

Veranschaulichung:

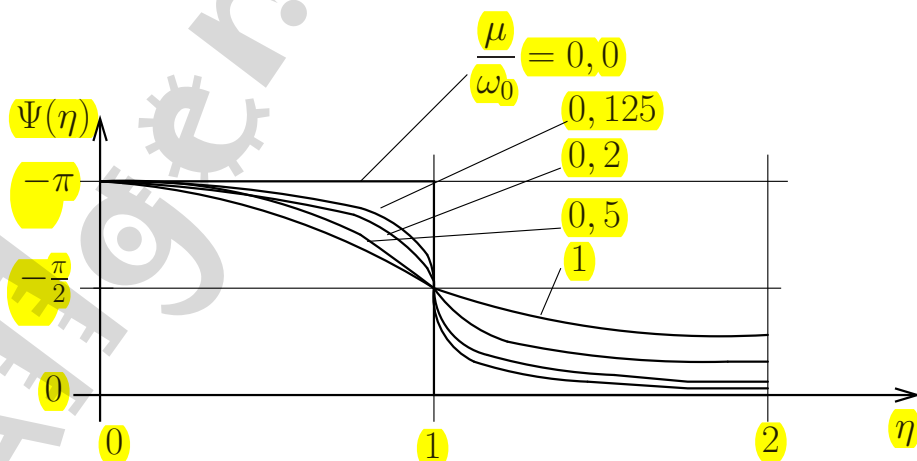


Trägt man die *Vergrößerungsfunktion* $V_A(\eta)$ über η auf, so erhält man für die verschiedenen Dämpfungsgrade $\frac{|\mu|}{\omega_0}$ folgendes schematische Diagramm:



Bem.: Man erkennt, dass ein ungedämpftes System ($\mu = 0$), welches mit der Eigenfrequenz $\Omega = \omega_0$ erregt wird, so dass $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0} = 1$ ist, eine unbegrenzte Vergrößerungsfunktion hat. Dieses Phänomen wird als *Resonanz* bezeichnet. Konstruktiv wird versucht den Resonanzbereich zu vermeiden.

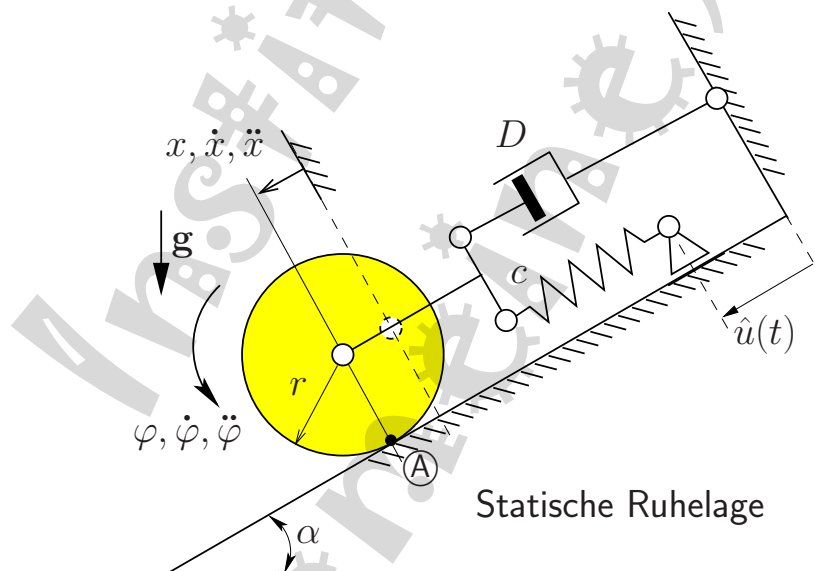
Entsprechend erhält man die Funktion $\Psi(\eta)$ zu:



☞ Die Lösung der wegerregten Schwingung ist analog zur Lösung der Differentialgleichung der kraftherregten Schwingung.

Beispiel: Wegerregte gedämpfte Schwingung einer Rolle

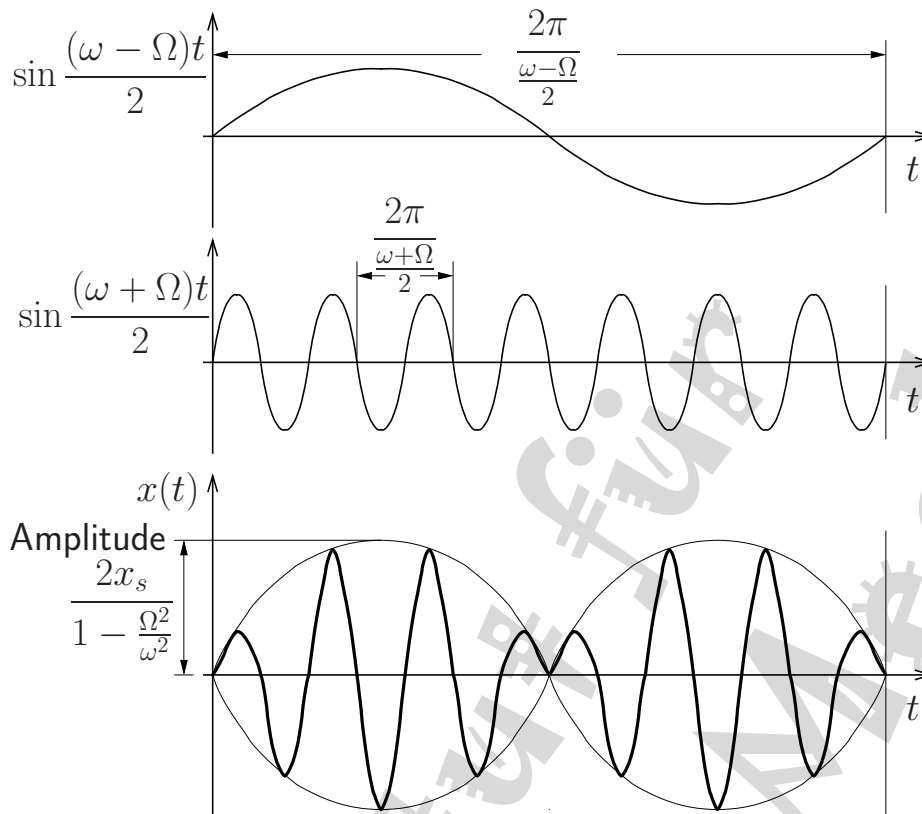
- Die Kreisscheibe mit der Masse m rollt ab ohne zu rutschen.
- Das Massenträgheitsmoment bezogen auf den Schwerpunkt ist θ^S .
- Gegeben sind die Federsteifigkeit c und die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung mit der Dämpfungskonstante D .
- Eine Wegerregung mit $\hat{u}(t) = \hat{u}_0 \cos \Omega t$ findet statt.
- Gesucht ist die Differentialgleichung der Bewegung.



Man betrachtet die Bewegung um die statische Ruhelage $x = 0$. Der Drallsatz bezüglich des raumfesten Punkts (A) liefert

$$\theta_A \ddot{\varphi} + D \dot{\varphi} r^2 + c (\varphi r - \hat{u}(t)) r = 0$$

mit $\theta_A = \theta_S + m r^2$. Alternativ erhält man mit $x = \varphi r$, $\dot{x} = \dot{\varphi} r$ und

Veranschaulichung:

7.4 Schwingende Systeme mit mehreren Freiheitsgraden

Lineare Schwingungen mit N Freiheitsgraden können über eine Matrixgleichung berechnet werden:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{F}$$

- Massenmatrix \mathbf{M} , Steifigkeitsmatrix \mathbf{C} und Dämpfungsmatrix \mathbf{D}
- Ortsfunktion \mathbf{x}
- Anregungsvektor $\mathbf{F}(t)$

Bem.: Die Dimension der Matrizen und Vektoren ist dabei $N \times N$ bzw. N , entsprechend der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems.

Die allgemeine Form der Matrixgleichung enthält als Sonderfall die gedämpfte Eigenschwingung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

sowie die ungedämpfte Eigenschwingung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$